



ce
pre
UNI

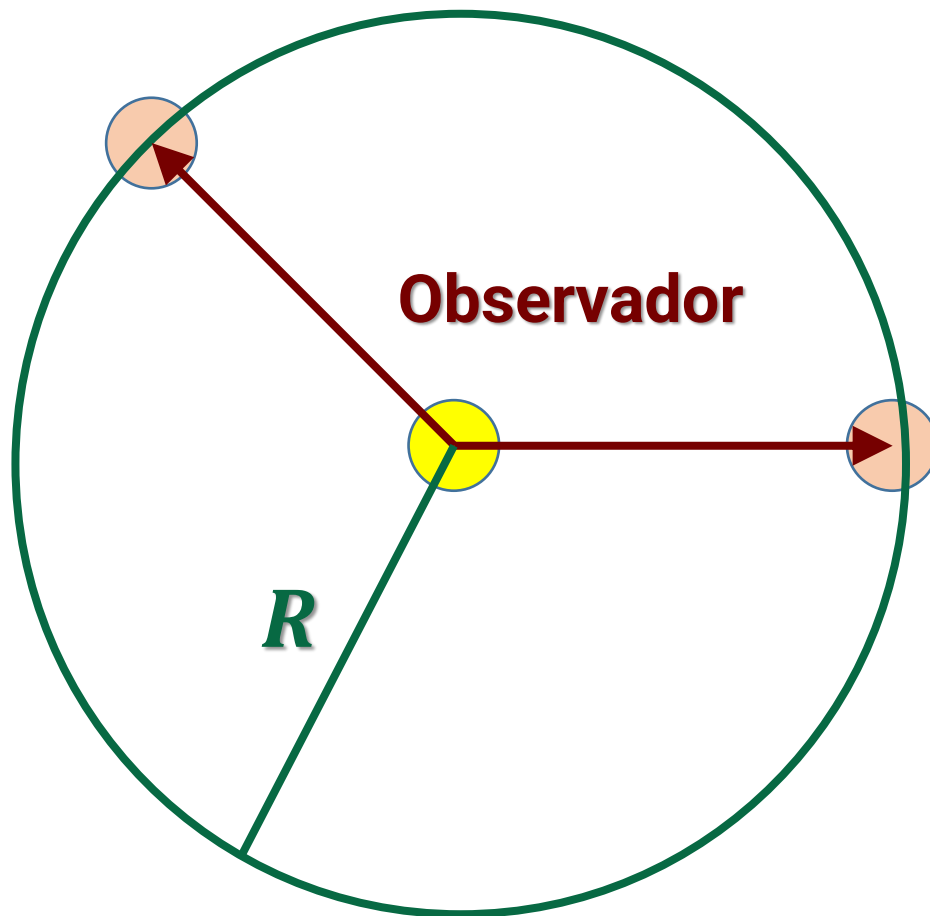
Física

**CICLO
BÁSICO
2024-1**



MOVIMIENTO CIRCULAR



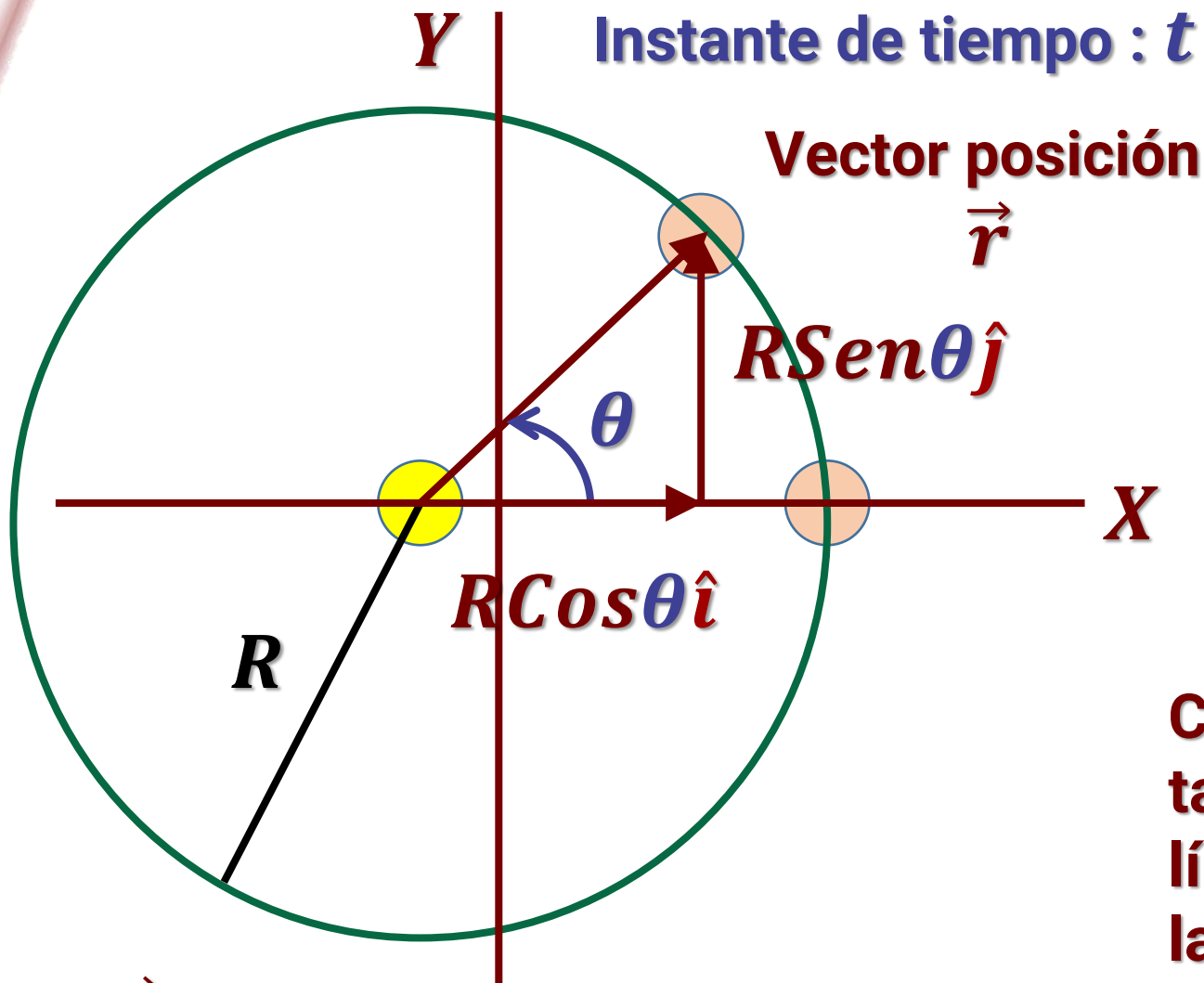


Instante de tiempo : t

Observable

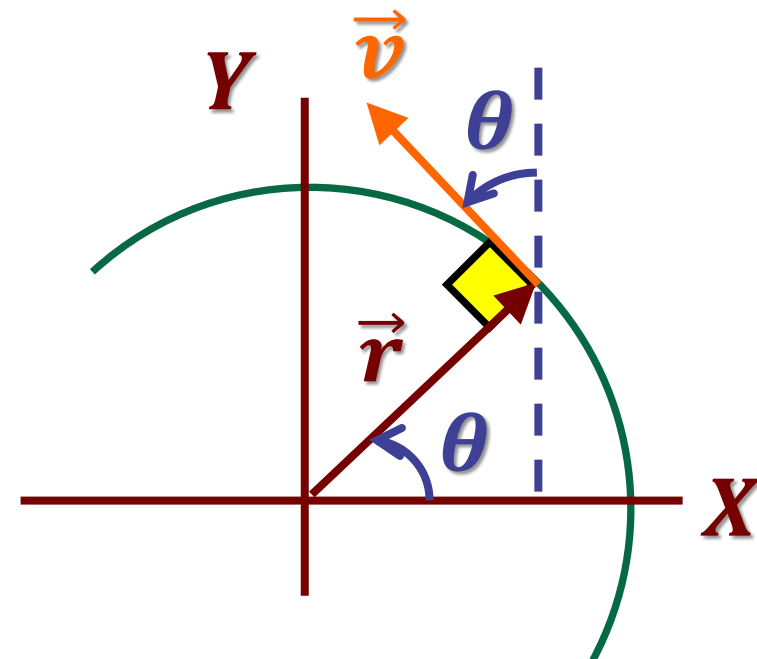
Vector posición
 $\vec{r}$

$|\vec{r}| = R$ (Radio de la
circunferencia)



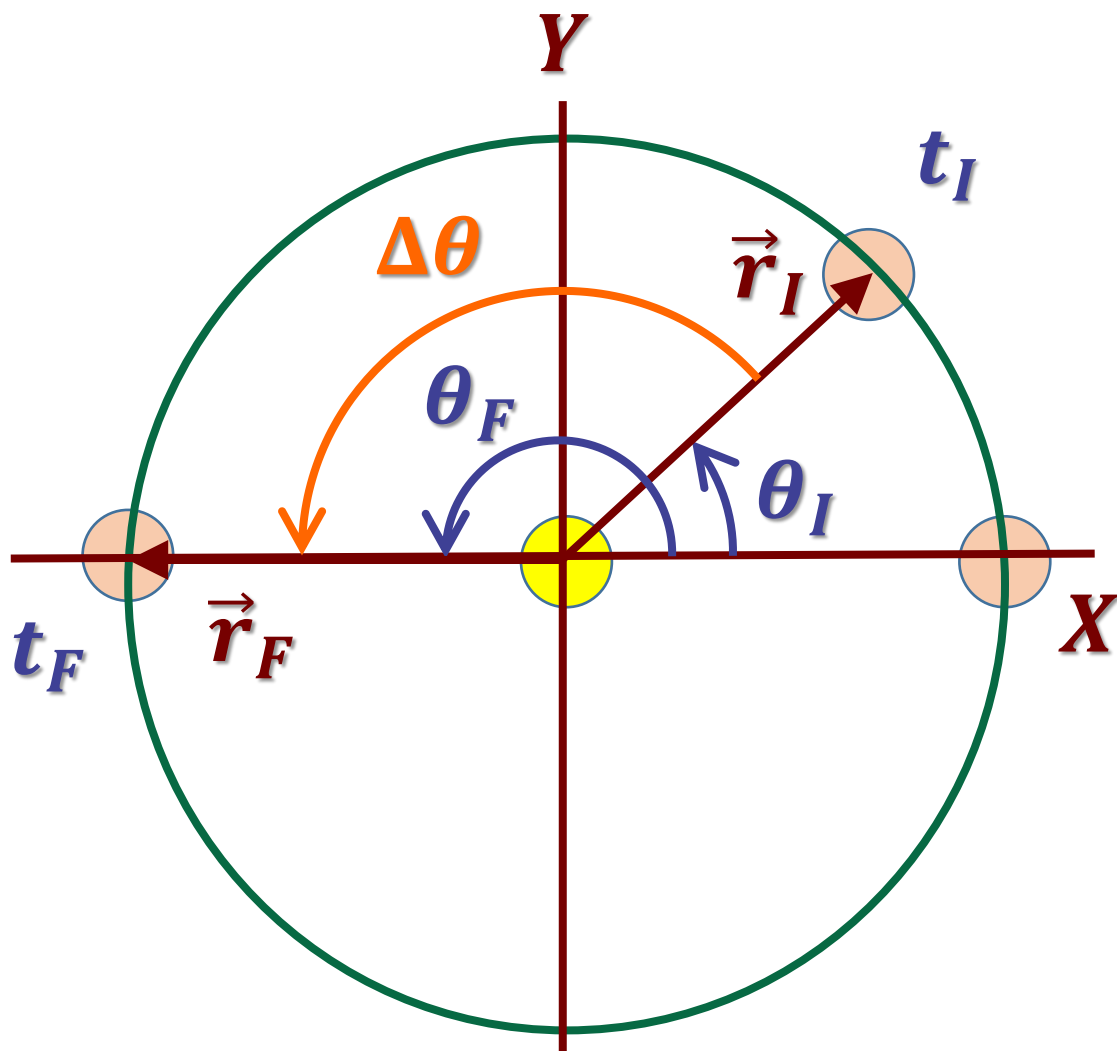
$$\vec{r} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$$

Vector posición **Posición angular**



Como la velocidad es tangente a la trayectoria y la línea radial es perpendicular a la línea tangente.

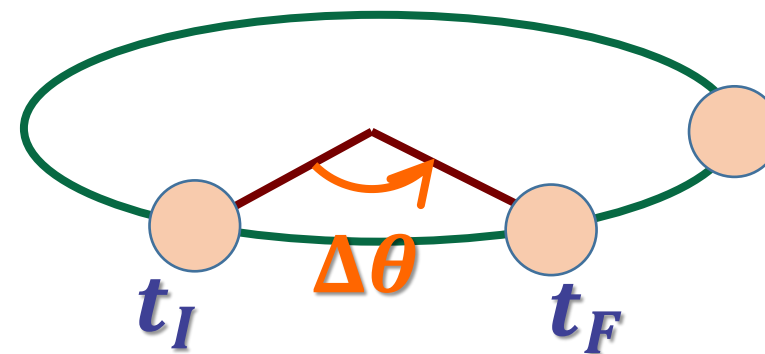
$$\vec{r} \perp \vec{v}$$



Desplazamiento
angular

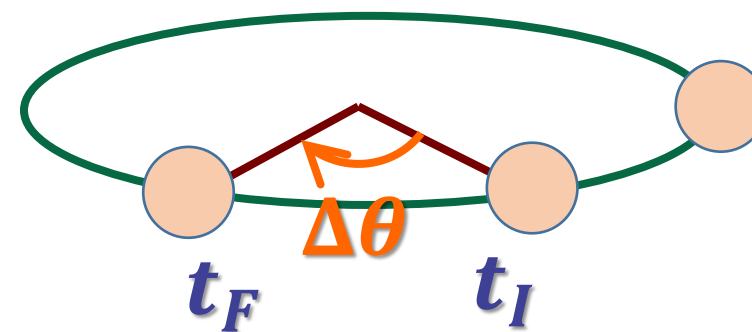
$$\Delta\theta = \theta_F - \theta_I$$

Giro antihorario



$\Delta\theta$ Positivo

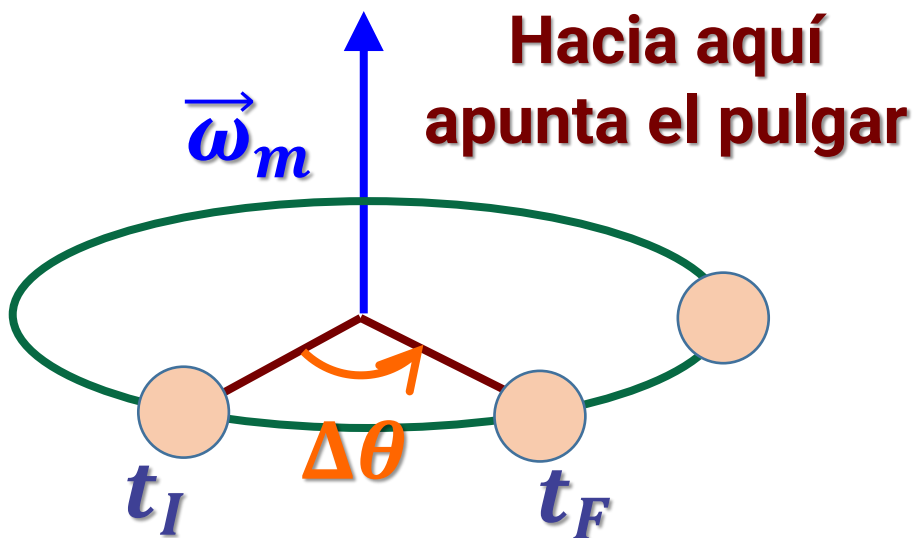
Giro horario



$\Delta\theta$ Negativ

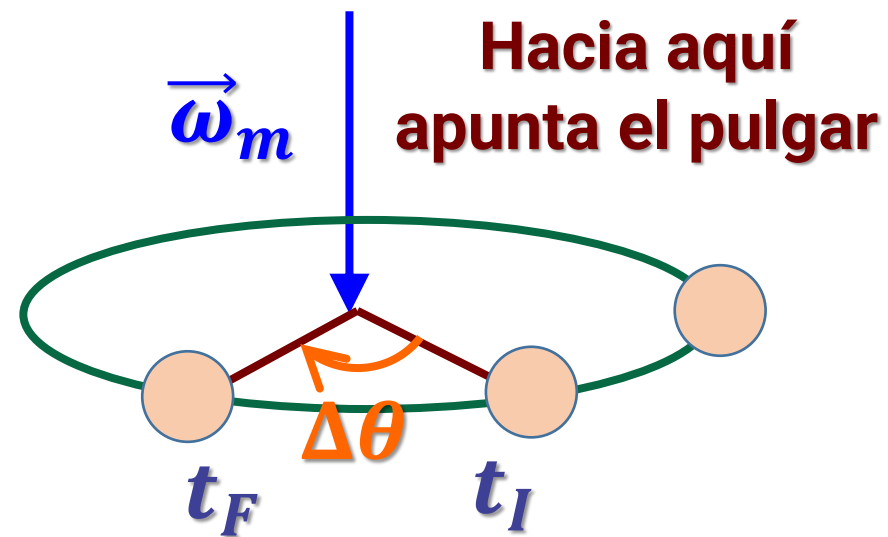
o

Imitar el giro con
la mano derecha



Giro
antihorario

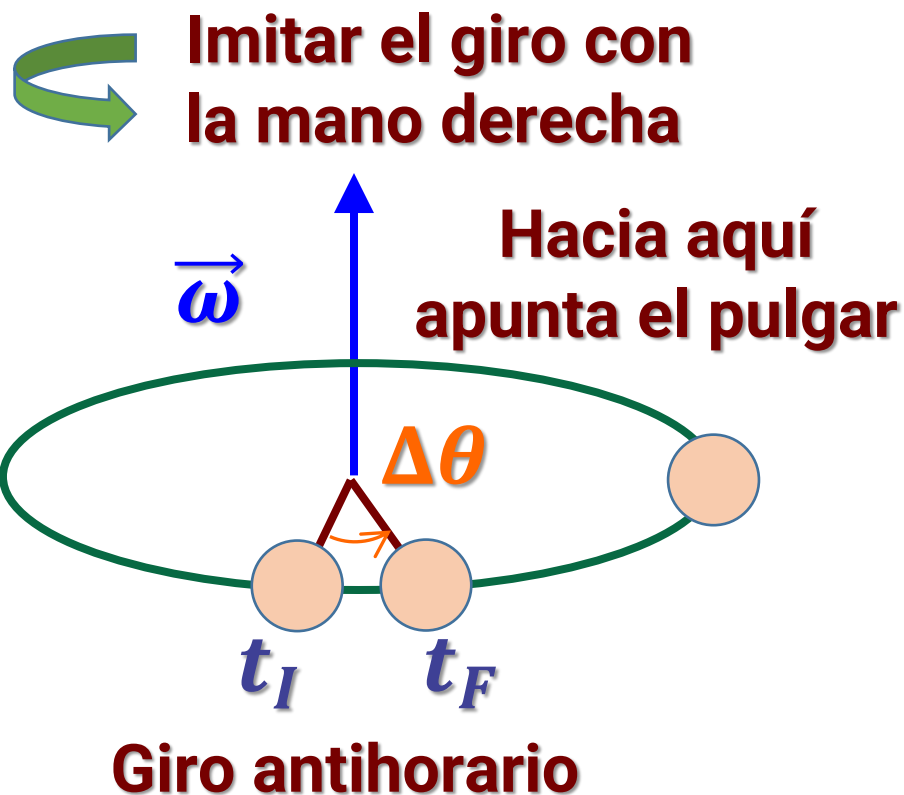
Imitar el giro con
la mano derecha



Giro
horario

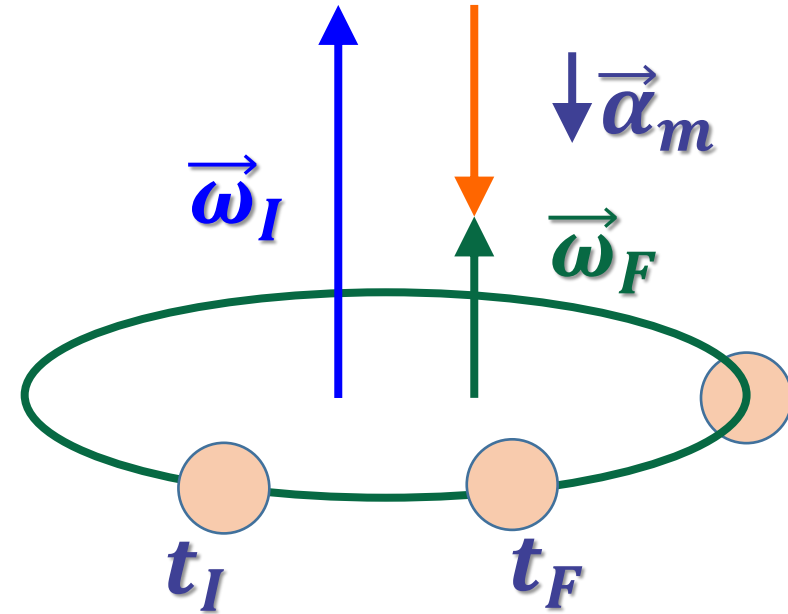
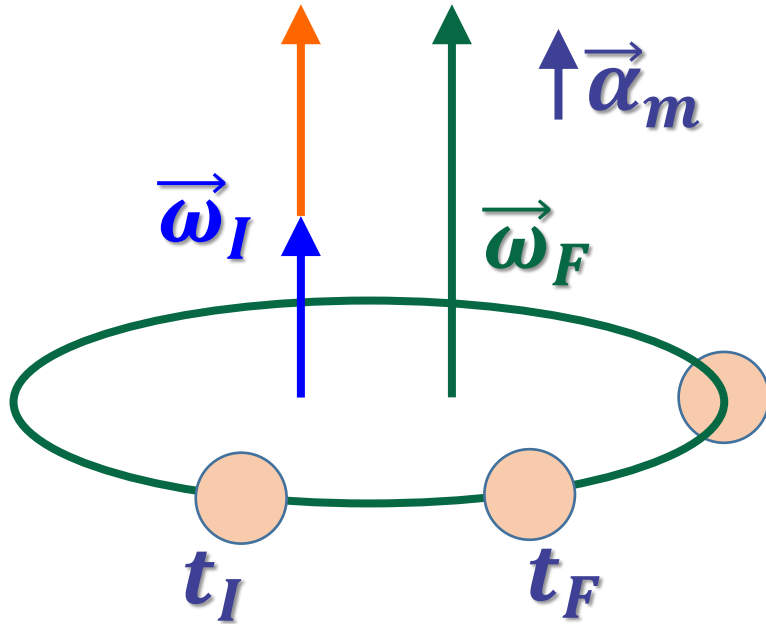
Velocidad angular media : $\vec{\omega}_m$ $|\vec{\omega}_m| = \frac{|\Delta\theta|}{\Delta t}$

Cuando $\Delta t = t_F - t_I$ es muy pequeño



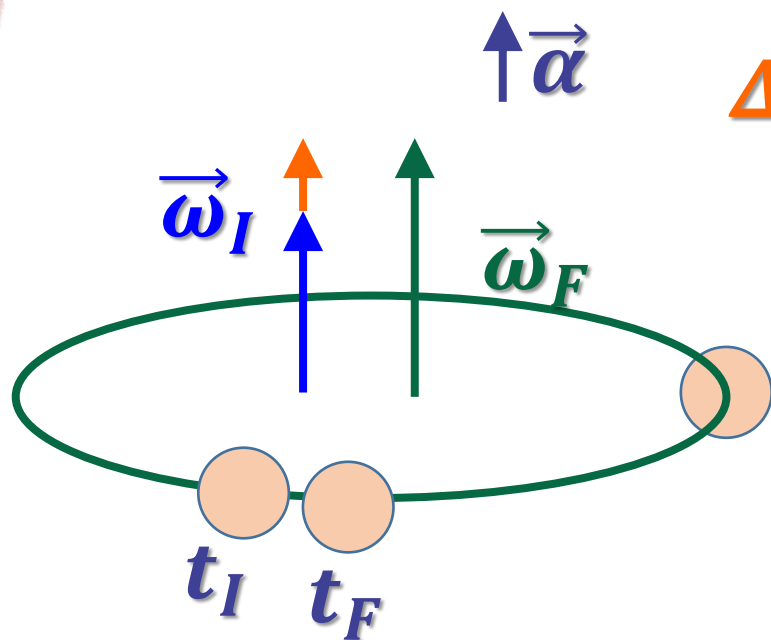
Velocidad angular instantánea: $\vec{\omega}$ $|\vec{\omega}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\theta|}{\Delta t}$

$$\Delta \vec{\omega} = \vec{\omega}_F - \vec{\omega}_I$$

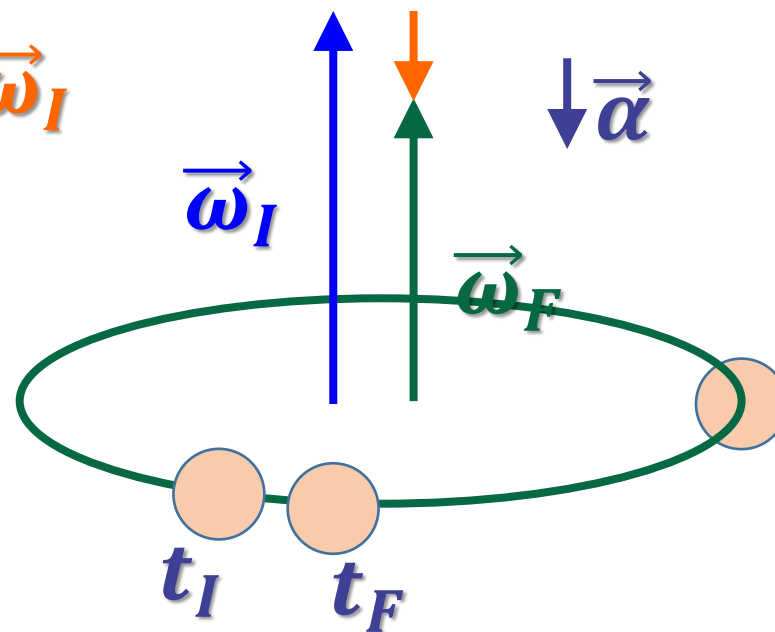


Aceleración angular media: $\vec{\alpha}_m = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}_F - \vec{\omega}_I}{t_F - t_I}$

Cuando $\Delta t = t_F - t_I$ es muy pequeño

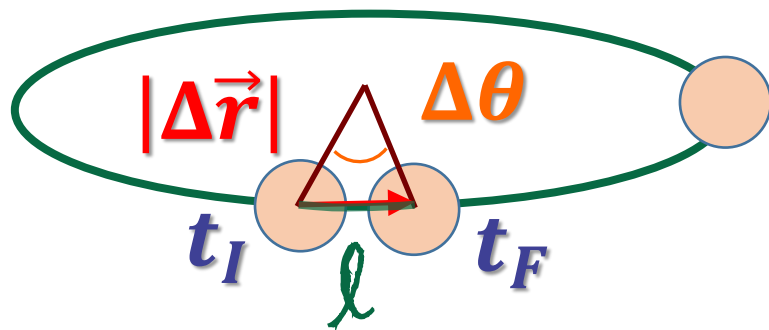


$$\Delta \vec{\omega} = \vec{\omega}_F - \vec{\omega}_I$$



Aceleración angular instantánea: $\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$

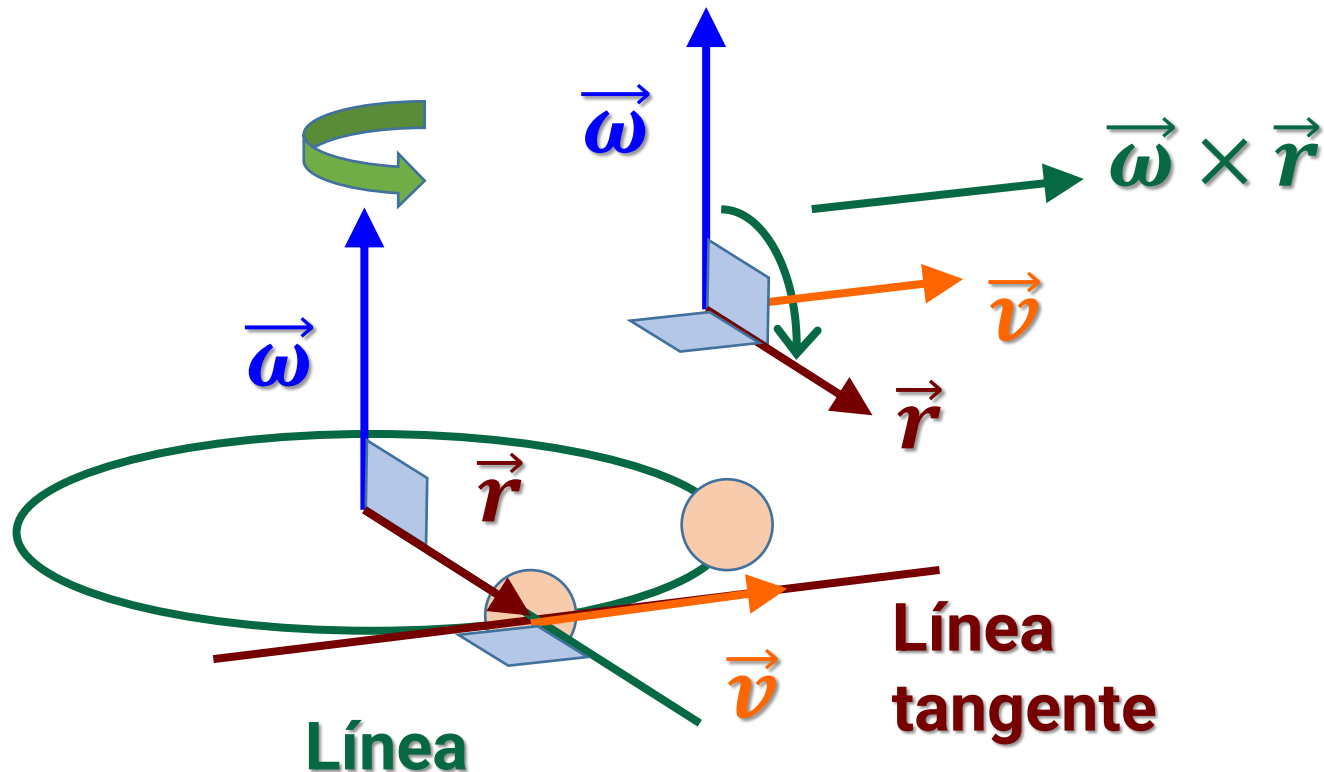
Cuando $\Delta t = t_F - t_I$
es muy pequeño



$$|\Delta \vec{r}| \approx l = |\Delta \theta| R$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \theta|}{\Delta t} R$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| R$$



$$\begin{aligned} |\vec{\omega} \times \vec{r}| &= |\vec{\omega}| |\vec{r}| \text{Sen} 90^\circ \\ &= |\vec{\omega}| R = |\vec{v}| \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_F - \vec{v}_I = \vec{\omega}_F \times \vec{r}_F - \vec{\omega}_I \times \vec{r}_I$$

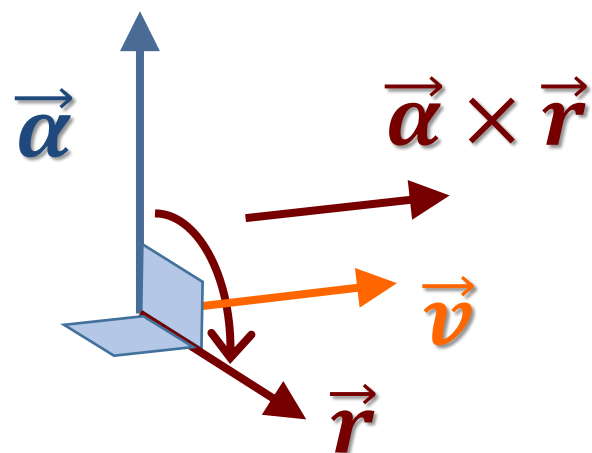
$$= \vec{\omega}_F \times \vec{r}_F - \vec{\omega}_I \times \vec{r}_F + \vec{\omega}_I \times \vec{r}_F - \vec{\omega}_I \times \vec{r}_I$$

$$= (\underbrace{\vec{\omega}_F - \vec{\omega}_I}_{\Delta \vec{\omega}}) \times \vec{r}_F + \underbrace{\vec{\omega}_I \times (\vec{r}_F - \vec{r}_I)}_{\vec{\omega}_I \times \Delta \vec{r}} = (\Delta \vec{\omega}) \times \vec{r}_F + \vec{\omega}_I \times (\Delta \vec{r})$$

Aceleración instantánea : $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

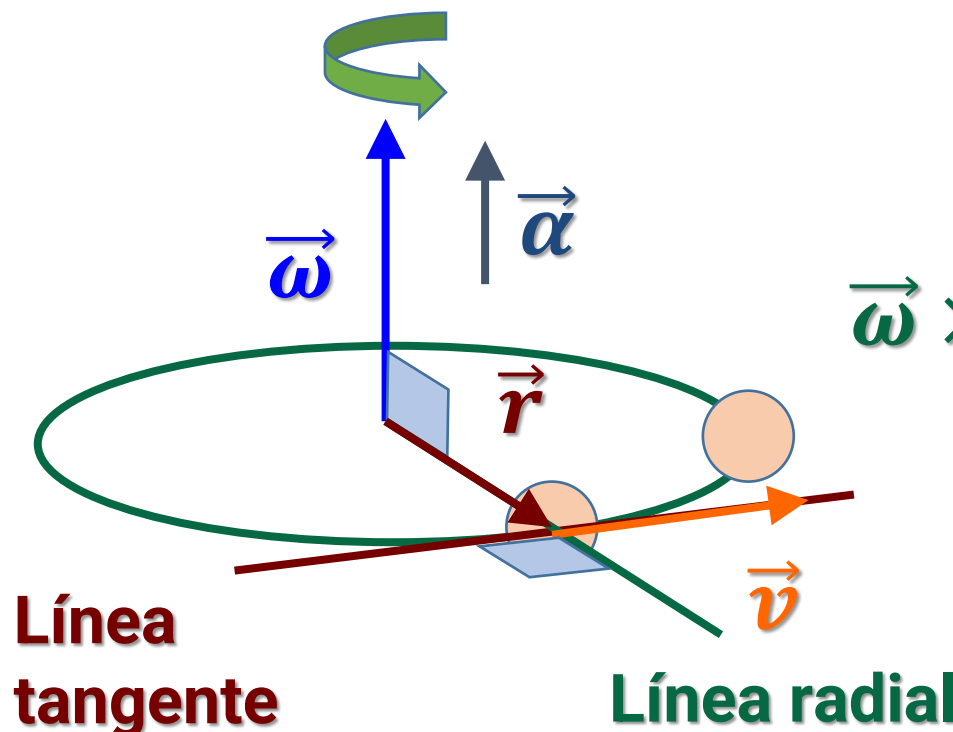
$$\underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}_{\vec{a}} = \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}}_{\vec{\alpha}} \times \vec{r}_F + \vec{\omega}_I \times \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}_{\vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}}$$



$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

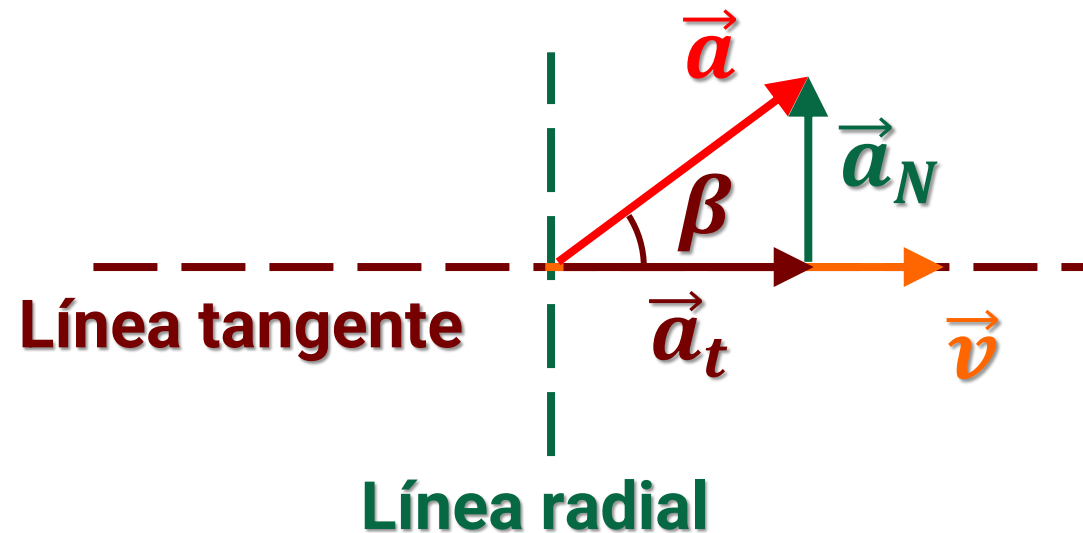
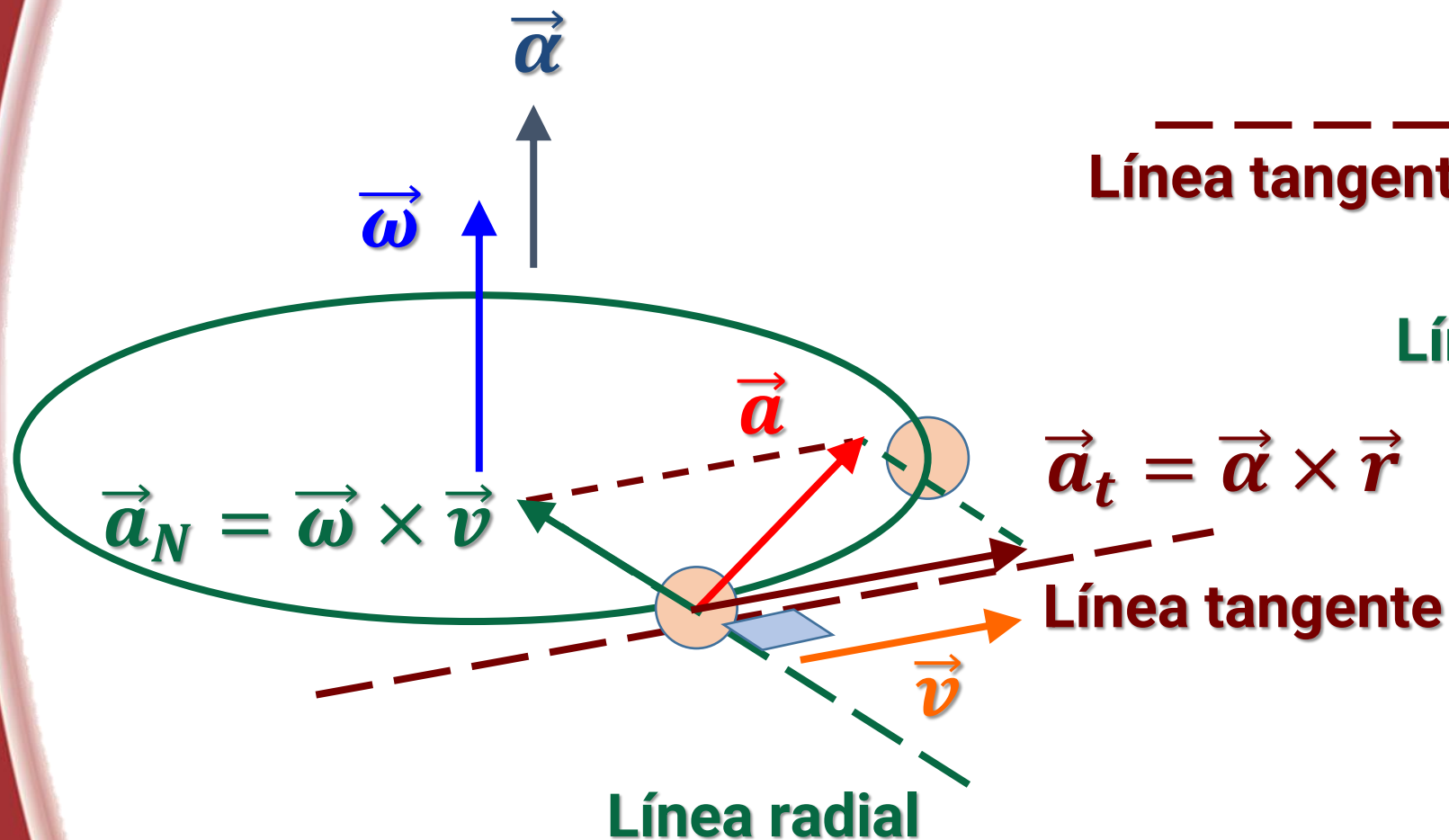
Componente tangencial de la aceleración (Aceleración tangencial). Aparece cuando cambia la rapidez del cuerpo.



$$\vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Componente normal de la aceleración (Aceleración normal, radial o centrípeta). Aparece cuando cambia la orientación de la velocidad.

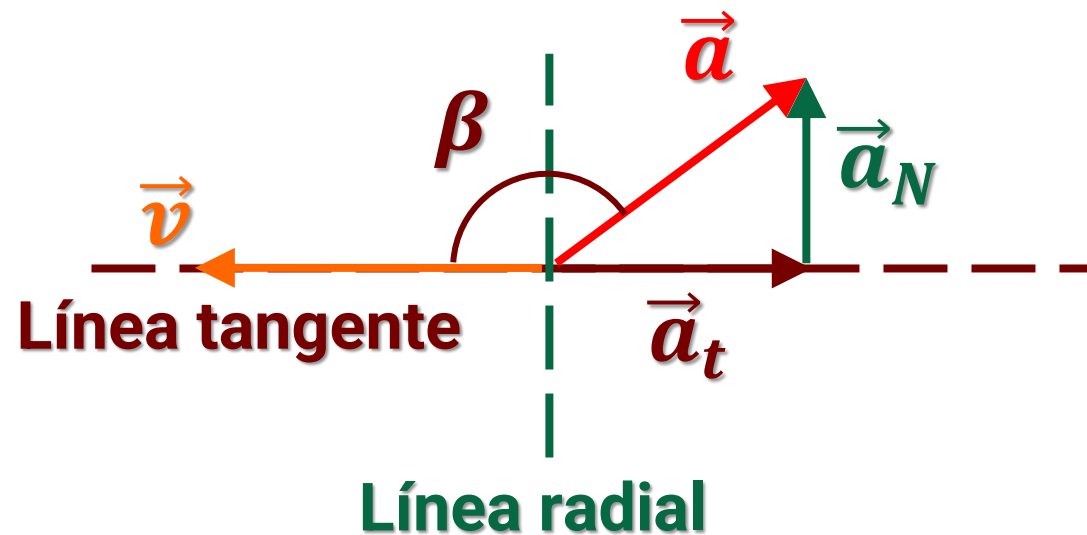
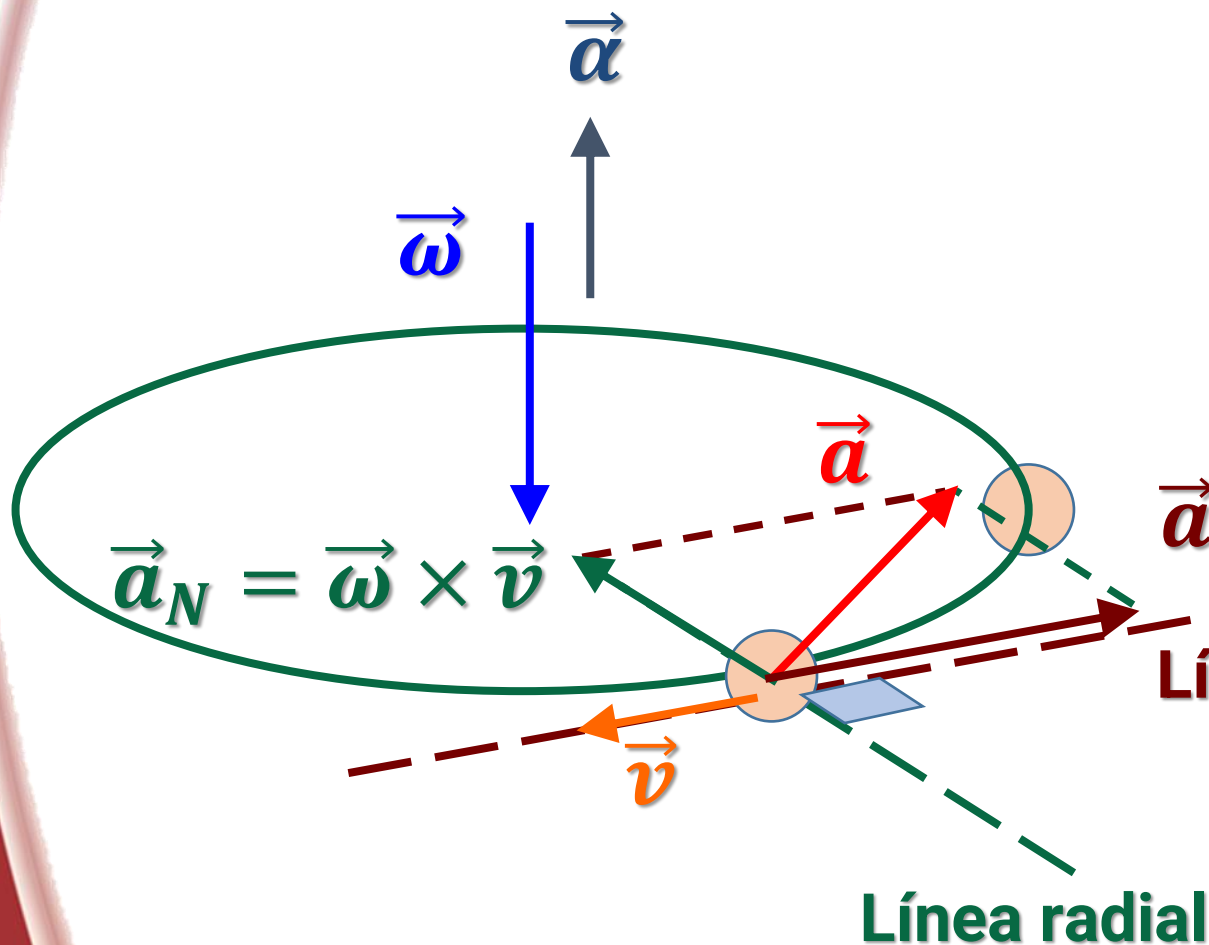
Cuando la rapidez de una partícula aumenta con el tiempo



β es el ángulo entre la velocidad y la aceleración

$$\operatorname{Tg} \beta = \frac{|\vec{a}_N|}{|\vec{a}_t|}$$

Cuando la rapidez de una partícula disminuye con el tiempo



$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Línea tangente

β es el ángulo entre la velocidad y la aceleración

$$\operatorname{Tg} (180^\circ - \beta) = \frac{|\vec{a}_N|}{|\vec{a}_t|}$$

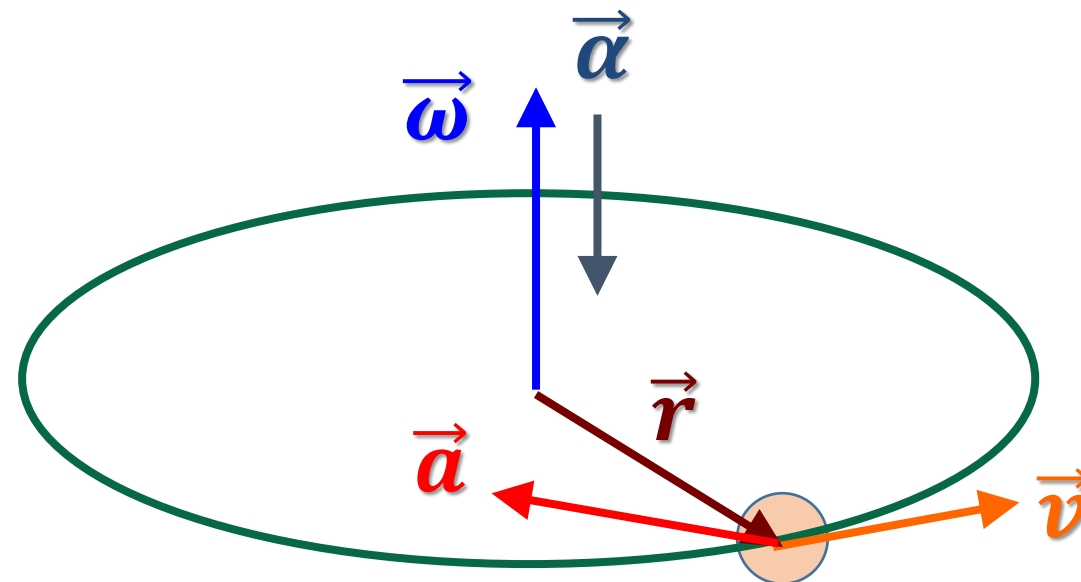
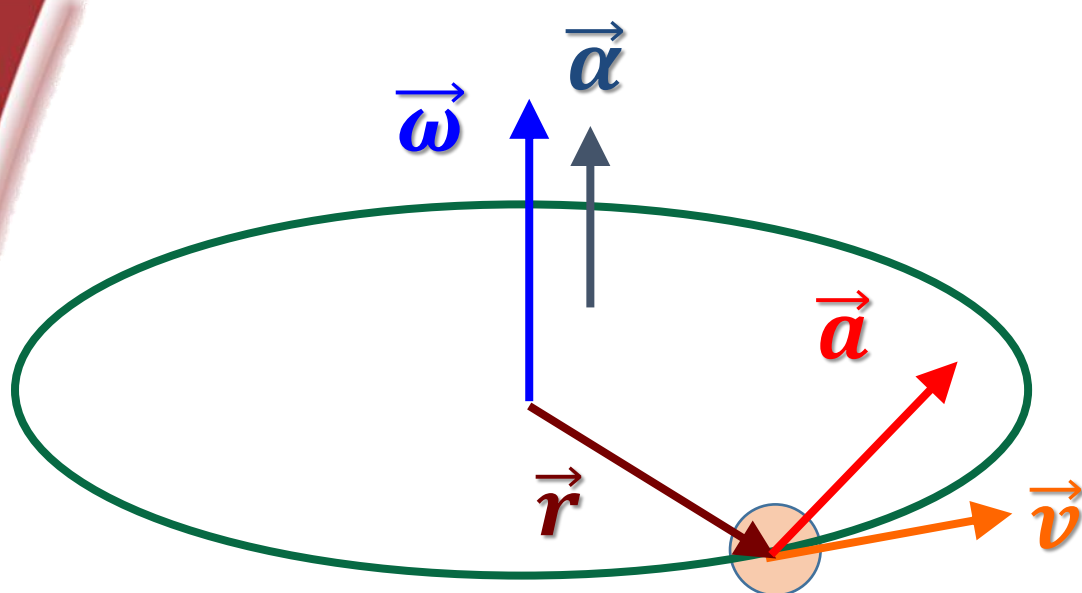
$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \Rightarrow |\vec{a}_t| = |\vec{\alpha}| |\vec{r}| \text{Sen } 90^\circ = |\vec{\alpha}| R$$

$$\vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v} \Rightarrow |\vec{a}_N| = |\vec{\omega}| |\vec{v}| \text{Sen } 90^\circ = |\vec{\omega}| |\vec{v}|$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| R \Rightarrow |\vec{a}_N| = |\vec{\omega}|^2 R = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

Como las componentes de la aceleración forman 90° entre sí

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_N \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_N|^2}$$



$\vec{\omega}$ nos indica cuán rápido y en que sentido gira el cuerpo

$\vec{\alpha}$ nos indica cuán rápido y en que orientación cambia $\vec{\omega}$

Si disminuye la rapidez, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ se oponen

Si aumenta la rapidez, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ tienen la misma orientación

$\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son perpendiculares a todos los vectores del plano de giro, plano donde están la posición, velocidad y aceleración.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

La velocidad angular es constante en todo intervalo de tiempo

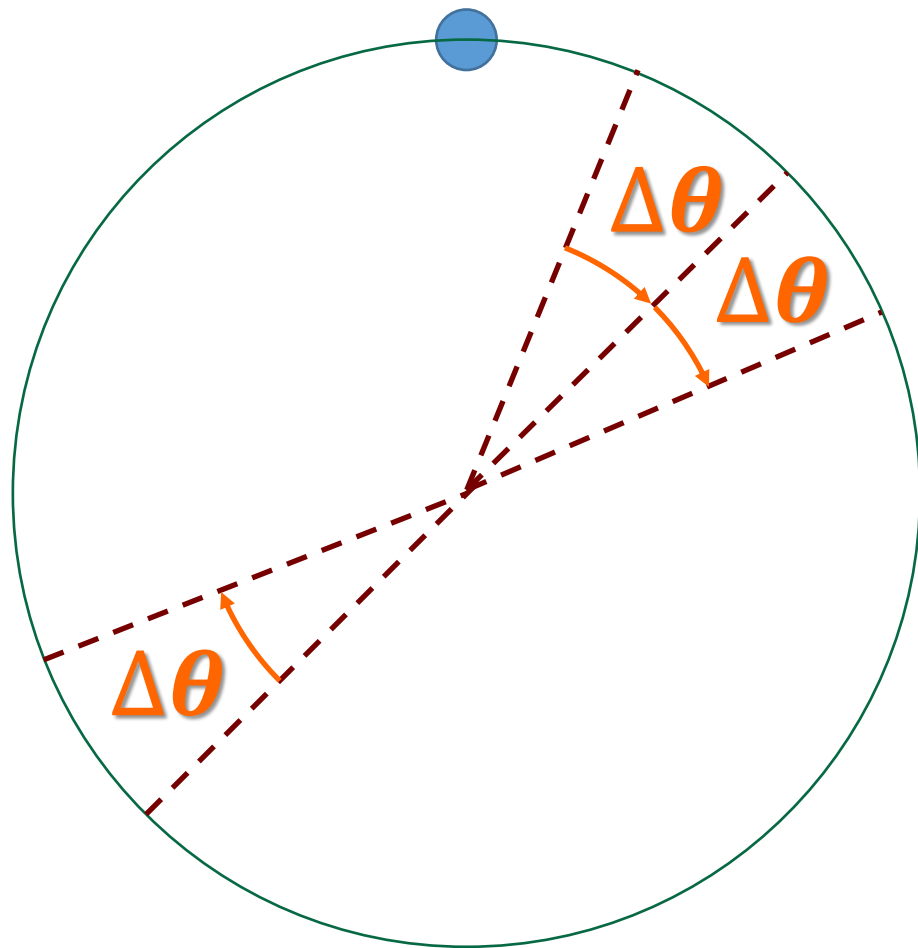
Para intervalo de tiempo

grande: $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{Cte.}$

Para intervalo de tiempo

pequeño: $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{Cte.}$

$$\Rightarrow \omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega = \text{Cte.}$$



Como $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega = \text{Cte.}$

⇒ El móvil barre ángulos iguales ($\Delta\theta$)
en intervalos de tiempo iguales (Δt)
Por ello cada vez que complete una vuelta ($\Delta\theta = 2\pi$) el tiempo es el mismo, al cual se llama periodo ($\Delta t = T$)

En el MCU $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$

Como cada cierto tiempo se repite el movimiento, definimos la frecuencia (ν) como el número de repeticiones por unidad de tiempo

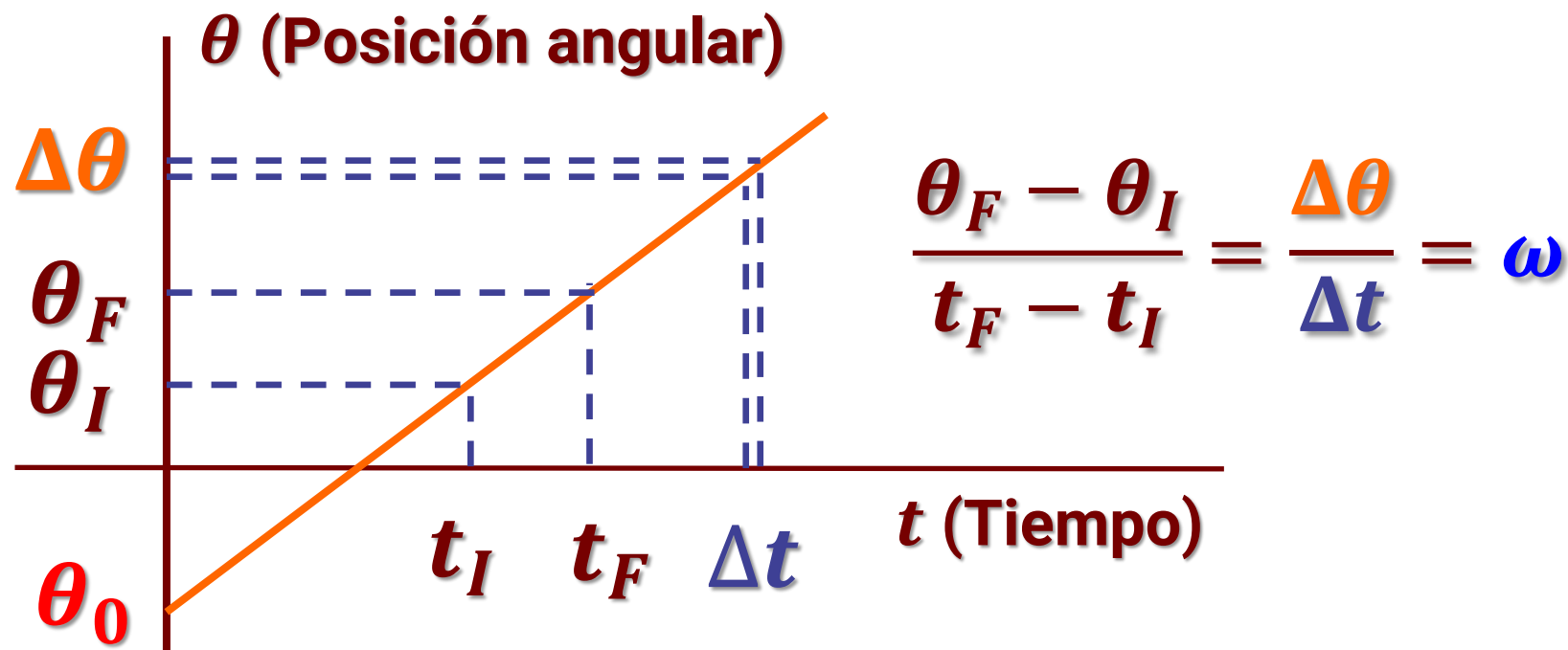
$$\nu = \frac{\text{Número de repeticiones}}{\text{Tiempo}} ; \text{unidad SI : hertz (Hz) Y } 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

para el MCU, esa repetición es cada vez que complete una vuelta o revolución, por ello

$$\nu = \frac{\text{Número de vueltas o revoluciones}}{\text{Tiempo}} = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$\text{Otra unidad : } 1 \text{ rpm} = 1 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = \frac{1}{60} \text{ Hz}$$

Gráfica posición angular en función del tiempo en MCU

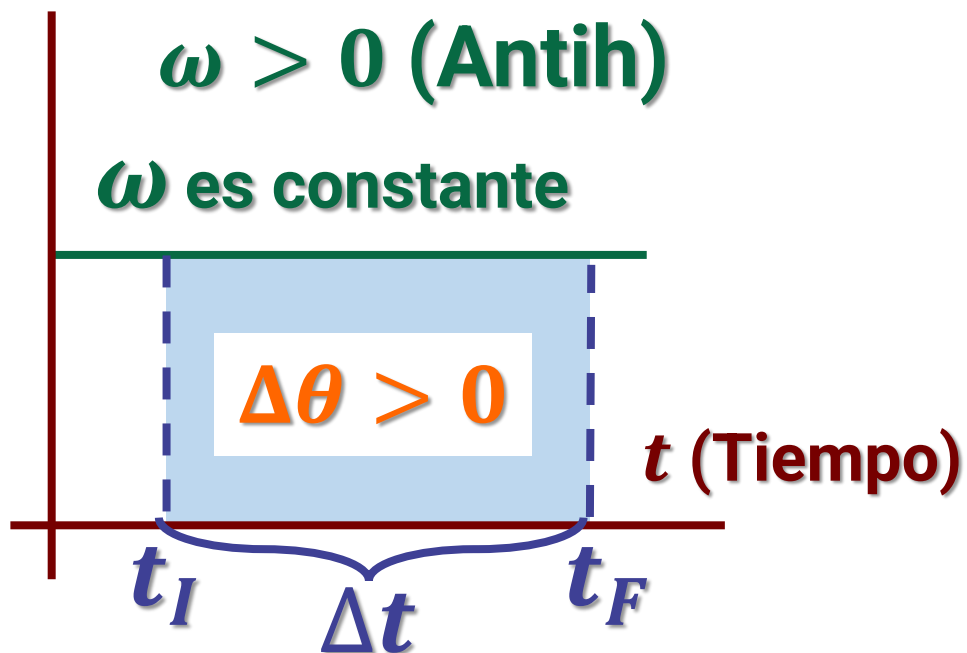


Posición angular en el instante $t = 0$

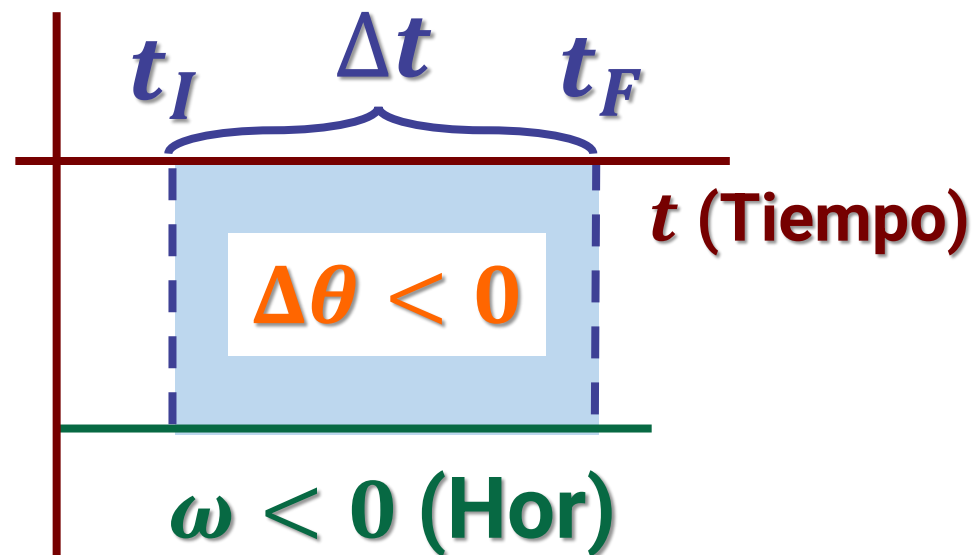
$$\frac{\theta - \theta_0}{t - 0} = \omega \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

Gráfica velocidad angular en función del tiempo en MCU

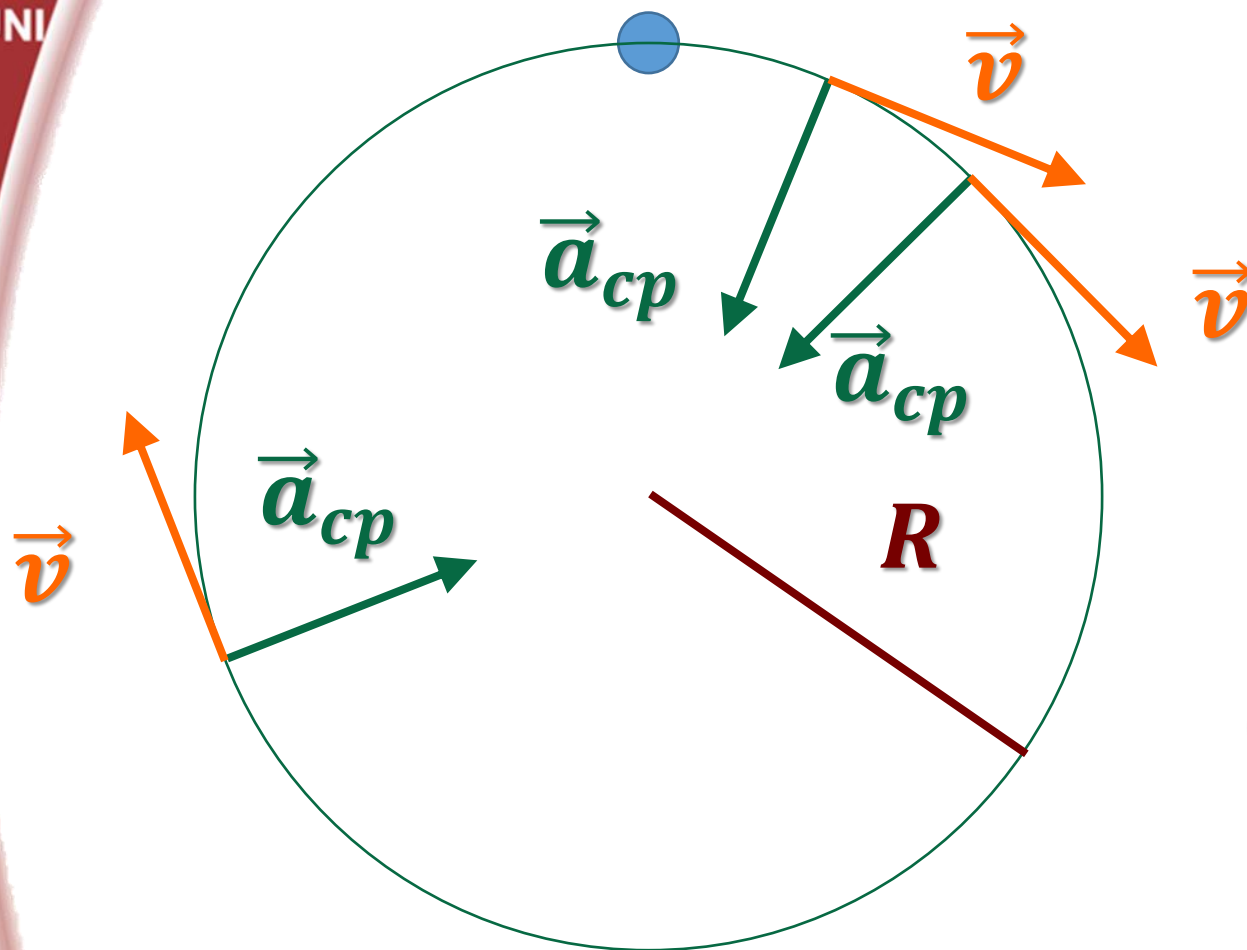
ω (Velocidad angular)



ω (Velocidad angular)



Como $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega \Rightarrow \text{Área} = (\text{Base})(\text{Altura}) = \omega \Delta t = \Delta\theta$



Rapidez : $|\vec{v}| = |\vec{\omega}|R$

Como en MCU : $\vec{\omega} = \text{Cte} \Rightarrow$

Rapidez : $|\vec{v}| = |\vec{\omega}|R$ es cte.

Aceleración : $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

Como en MCU : $\vec{\omega} = \text{cte.} \Rightarrow \vec{\alpha} = 0$

Aceleración: $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_{cp}$

$\Rightarrow$ El módulo de la aceleración $|\vec{a}_{cp}| = |\vec{\omega}|^2 R = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$ es cte.